Matrice

Neka su m i n pozitivni cijeli brojevi.
$m \times n$ matrica je kolekcija od $m \cdot n$ brojeva uređenih u pravougaoni niz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad m \text{ redova}$$

n kolona

Npr. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}$ je 2×3 matrica, $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 8 & 9 \\ 7 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}_{5 \times 4}$

Brojeve u matrici zovemo elementi matrice i označavamo sa a_{ij}, gdje su i, j cijeli $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq n$. Indeks i zovemo red indeks, a j kolona indeks.

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

Npr. u matrici A

$a_{12} = \sqrt{2}$, $a_{23} = -5$, $a_{43} = 2$, $a_{53} = -2$

$1 \times n$ matricu zovemo n-dimenzionalni red vektor, $A = [a_1 \dots a_n]$
$m \times 1$ matrica je m-dimenzionalni kolona vektor $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Sabiranje matrica: $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [s_{ij}]_{m \times n}$,

gdje je $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i, j$

npr.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Skalarno množenje matrice brojem:

c je realan broj $\quad c\cdot[a_{ij}]_{m\times n} = [b_{ij}]_{m\times n}$.

gdje je $b_{ij} = c\cdot a_{ij} \ \forall i,j$

npr.

$$2\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 6\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

Brojeve ćemo često zvati skalari.

Množenje matrica:

Prvo ćemo vidjeti šta je proizvod red vektora A i kolone vektora B.

$$A\cdot B = [a_1\ a_2 \dots a_n]\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n.$$

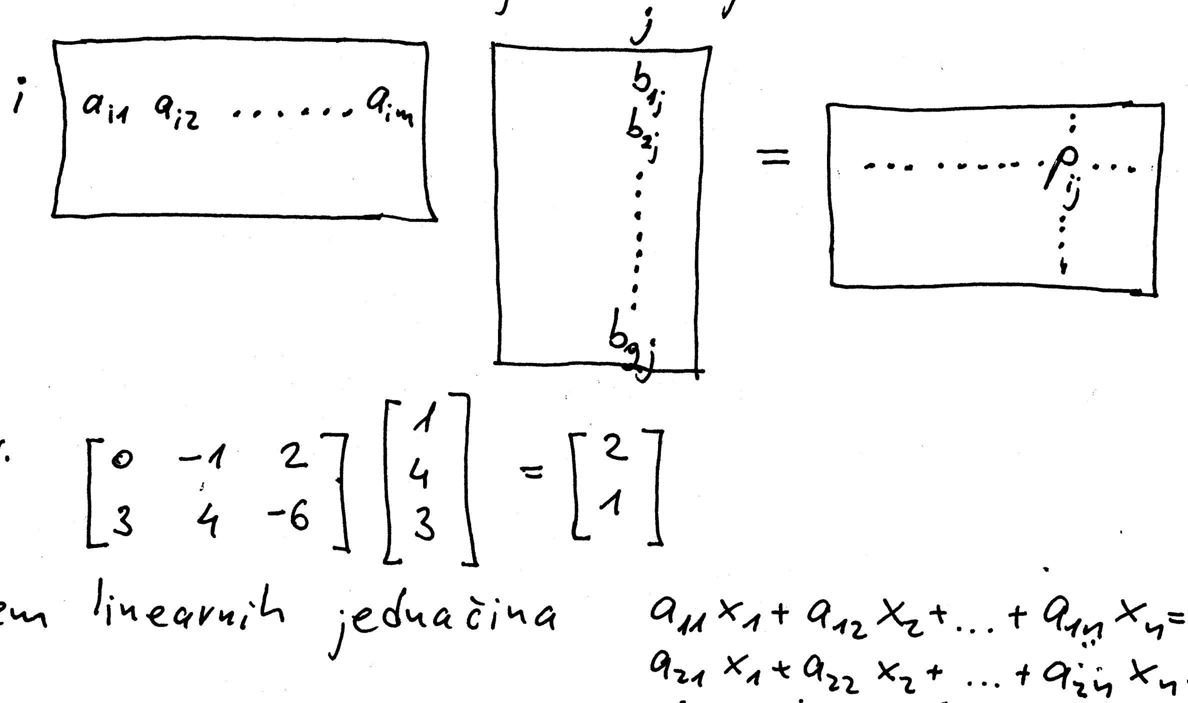
npr. $[3\ \ 1\ \ 2]\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 4\end{bmatrix} = 3-1+8=10$

generalno:

$$[a_{ij}]_{m\times q}\cdot[b_{ij}]_{q\times s} = [p_{ij}]_{m\times s}$$ gdje je

$$p_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

ovo znači proizvod i-tog reda od A i j-te kolone od B.



npr. $\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\\ 3 & 4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$

Sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\ \vdots\qquad\quad \vdots \qquad\quad\ \vdots\qquad\qquad &\ \ \vdots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

možemo pisati u matričnom obliku $A x = \mathbf{b}$, gdje A predstavlja koeficijent matricu $[a_{ij}]_{m\times n}$

$$\boxed{\quad A \quad}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}.$$

Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunati

a) a_{11} b) a_{13} c) a_{31} d) $\sum_{i=1}^{3} a_{ii}$

Rj:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

druga vrsta matrice A

prva kolona matrice A

Elementi matrice A su u obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

a) $a_{11} = 1$, b) $a_{13} = 5$ c) $a_{31} = 2$

broj vrste broj kolone

d) $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + (-2) + 1 = 0$

(#) Posmatrajmo matricu B

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Izračunati

a) b_{12} b) b_{21} c) b_{23} d) $\sum_{i=1}^{4} b_{ii}$

(#) Posmatrajmo matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 4 & -2 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ako postoji, izračunati:

(a) A^T (b) C^T (c) $A+B$

(d) $A+C$ (e) $(A+B)^T$ (f) A^T+B^T

(g) $B+B^T$ (h) $C+C^T$

(#) Za matrice iz prethodnog zatka, ako postoje, izračunati sljedeće

(a) $A+A$ (b) $2A$

(c) $A+A+A$ (d) $4A+B$

(#) Neka su $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{ij}]$ matrice iz $Mat_{4\times3}(\mathbb{R})$ (skupa svih matrica oblika 4×3 čiji su elementi iz skupa realnih brojeva) definisane sa $a_{ij}=(-1)^{i+j}$ i $b_{ij}=i+j$.

Ako postoje, odrediti sljedeće matrice

(a) A^T (b) $A+B$ (c) A^T+B

(d) A^T+B^T (e) $(A+B)^T$ (f) $A+A$

Rj. Prvo odredimo šta su matrice A i B.

$a_{11}=(-1)^2=1$

$a_{12}=(-1)^3=-1$

$a_{13}=(-1)^4=1$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}_{4\times3}$$

$b_{11}=1+1=2$

$b_{12}=1+2=3$

$b_{13}=1+3=4$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

a) $A^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

(b) $A+B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

c) A^T+B ne postoji

d) $B^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

završiti za vježbu

Neka su A i B matrice iz $Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ definisane sa
$A[i,j]=ij$ i $B[i,j]=i+j^2$.

(a) Izračunati $A+B$

(b) Izračunati $\sum_{i=1}^{3} A[i,i]$

(c) Da li je A jednaka svojoj transpoziciji A^T?

(d) Da li je B jednaka svojoj transpoziciji B^T?

Posmatrajmo matrice $A=\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Izračunati sljedeće

(a) AB (b) BA (c) $A^2=A\cdot A$ d) B^2

(a) Za matrice iz prethodnog zadatka izračunati $(A+B)^2$ i $A^2+2AB+B^2$.

(b) Da li su rezultati dijela pod (a) isti? Diskutovati.

(a) Ispisati sve 3×3 matrice čiji su redovi
$[1\ 0\ 0]$, $[0\ 1\ 0]$ i $[0\ 0\ 1]$.

(b) Koje od dobijenih matrica, dijela pod (a), su jednake svojim transponovanim matricama.

#) U ovom zadatku A i B predstavljaju matrice. Da li su sljedeće tvrdnje tačne ili lažne?

(a) $(A^T)^T = A$ za sve A

(b) Ako je $A^T = B^T$ tada $A = B$.

(c) Ako je $A = A^T$, tada je A kvadratna matrica.

(d) Ako su A i B istog oblika, tada $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Rj. Neka je $A_{m\times n}$ i $B_{p\times q}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2q} \\ \vdots & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \dots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

a) $$(A^T)^T = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

prva tvrdnja je tačna

b)

završiti za vježbu

tvrdnje b), c) i d) su tačne

(#) Za sve $n \in \mathbb{N}$, neka je $A_n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $B_n = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Odrediti A_n^T za sve $n \in \mathbb{N}$

(b) Izračunati $\{n \in \mathbb{N} : A_n^T = A_n\}$.

(c) Odrediti $\{n \in \mathbb{N} : B_n^T = B_n\}$

(d) Odrediti $\{n \in \mathbb{N} : B_n = B_0\}$

Rj.

a) $A_n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_n^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$

b) $A_n^T = A_n$ akko $\quad 1=1 \quad n=0$

$0=n \quad 1=1$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$

tj. $n=0$

$\{n \in \mathbb{N} : A_n^T = A_n\} = \emptyset$

c) $B_n = \begin{bmatrix} 1 & (-1)^n \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B_n^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ (-1)^n & 1 \end{bmatrix}$

$B_n^T = B_n$ akko $\quad 1=1 \quad (-1)^n = -1$

$(-1) = (-1)^n \quad 1=1$

tj. $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$

$\{n \in \mathbb{N} : B_n^T = B_n\} = \{1, 2, 3, 5, 7, \ldots\}$ ← svi neparni prirodni brojevi

(d) za vježbu

\# Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati A^7.

Rj:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = A^4 \cdot A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Ako je $A=\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}$ izračunati:

a) $A+B$ b) $A-B$ c) $2A-3B-I$ (I jedinična matrica)

Rj. a) $\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3&11\\6&2&10\\6&3&17\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&5&-1\\0&2&2\\-4&-1&-3\end{bmatrix}$

c) $2\begin{bmatrix}2&4&5\\3&2&6\\1&1&7\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&-1&6\\3&0&4\\5&2&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&8&10\\6&4&12\\2&2&14\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-3&18\\9&0&12\\15&6&30\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&11&-8\\-3&3&0\\-13&-4&-17\end{bmatrix}$

2. Izračunati:

a) $\begin{bmatrix}2&3\\1&6\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1\\3&5\end{bmatrix}$ Rj. $=\begin{bmatrix}2\cdot2+3\cdot3&2\cdot1+3\cdot5\\1\cdot2+6\cdot3&1\cdot1+6\cdot5\\0\cdot2+1\cdot3&0\cdot1+1\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&17\\20&31\\3&5\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1&4\\2&-5\\3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&-2\\2&5&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+4\cdot2&1\cdot4+4\cdot5&1\cdot(-2)+4\cdot6\\2\cdot1+(-5)\cdot2&2\cdot4+(-5)\cdot5&2\cdot(-2)+(-5)6\\3\cdot1+6\cdot2&3\cdot4+6\cdot5&3\cdot(-2)+6\cdot6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&24&22\\-8&-17&-34\\15&42&30\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&4&6\\1&2&3\\3&6&9\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}a&b&c\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=a+2b+3c$

3. Ako je $A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}$ izračunati $3A^2-2A^T+5\cdot I$.

(A^T transponovana matrica matrice A) (kada elementi iz reda zamjene položaj sa elementima iz kolona)

Rj. $A^T=\begin{bmatrix}1&2&3\\-2&-4&-5\\3&1&2\end{bmatrix}$. $A^2=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-9&7\\-3&7&4\\-1&4&8\end{bmatrix}$

$3A^2-2A^T+5=\begin{bmatrix}18&-27&21\\-9&21&12\\-3&12&24\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&4&6\\-4&-8&-10\\6&2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21&-31&15\\-5&34&22\\-9&10&25\end{bmatrix}$

4. Ako je $A=\begin{bmatrix}2&3&5\\-3&1&5\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-2&-3\\-1&0\\1&1\end{bmatrix}$, izračunati $2\cdot A^T\cdot A-3\cdot B\cdot B^T+6I$.

Rj. $\begin{bmatrix}-7&0&5\\0&23&43\\5&43&100\end{bmatrix}$

Determinante

matrica tipa $n \times n$

Determinanta je broj pridružen svakoj kvadratnoj matrici.
Determinantu matrice A obilježavamo sa $\det A$ ili $|A|$.
Preciznija definicija determinante je:
Determinanta je f-ja koja $n \times n$ realnih brojeva preslikava u realan broj.

Osobine determinante: (neke osobine determinanti)

1. Determinanta jedinične matrice je 1 ($\det I = 1$).
2. Ako dva reda (ili dvije kolone) međusobno zamjene mjesta znak determinante se mijenja.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3. a) Determinanta se množi jednim brojem ako se tim brojem pomnože svi elementi jednog reda (ili jedne kolone)

$$t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

(linearnost za svaki red)

1. Izračunati: $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{R_j}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 = 2$$

razvoj determinante po trećem redu

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{po prvom redu}}{\overset{\text{razvoj determinante}}{=}} 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 0 = 6$$

Mogli smo izračunati i na sljedeći način:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{II_k - III_k}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-3) = 6$$

2. Izračunati:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{III_k - IV_k}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$

b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{I_R - IV_R}{=\!=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 2 =$

$= -8$

3. Izračunati:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ Rj. $\overset{I_R - II_R}{=\!=} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \overset{III_R + I_R}{=\!=} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

$= 5 \cdot 5 = 25$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{I_R - III_R}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} \overset{II_R + I_R}{=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

$= (-2) \cdot 15 = -30$

4. Izračunati:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ Rj. $\overset{\substack{II_R - I_R \cdot 2 \\ III_R - I_R \cdot 3 \\ IV_R - I_R \cdot 4}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$= 5 \cdot (-1) = -5$

b)^v $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ c)^v $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Rješenja:

b) 0 c) -1

5.^{v} Izračunati: $\begin{vmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{2} & \sqrt{5} \\ 5\sqrt{3} & \sqrt{8} & 7\sqrt{5} \\ \sqrt{5}+2\sqrt{3} & 4\sqrt{2} & \sqrt{3}+2\sqrt{5} \end{vmatrix}$.

Rj. $36\sqrt{2}$

6. Dokazati da je $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = 0$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2+a^3 \\ 1 & a^2 & a^3+a \\ 1 & a^3 & a+a^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2(1+a) \\ 1 & a & a(a^2+1) \\ 1 & a^2 & a(1+a) \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & a(a+1) \\ 1 & a & a^2+1 \\ 1 & a^2 & a+1 \end{vmatrix} \xrightarrow[III_R - I_R]{II_R - I_R}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & a(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a^2-1 & 1-a^2 \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} a-1 & 1-a \\ (a+1)(a-1) & 1-a^2 \end{vmatrix} = a^2(a-1) \begin{vmatrix} 1 & 1-a \\ a+1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix}$$

$$= a^2(a-1)(1-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a-1)(1-a)(a+1) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} = 0$$

što je i trebalo dobiti.

7. Izračunati: $\begin{vmatrix} a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ a & b & b & a \\ b & a & b & a \end{vmatrix}$

Rj. $\xrightarrow{IV_k + (I_k + II_k + III_k)} \begin{vmatrix} a & b & a & 2a+2b \\ b & a & a & 2a+2b \\ a & b & b & 2a+2b \\ b & a & b & 2a+2b \end{vmatrix}$

$$= (2a+2b) \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b & a & a & 1 \\ a & b & b & 1 \\ b & a & b & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[IV_R - III_R]{II_R - I_R} (2a+2b) \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ a & b & b & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{III_R - I_R} (2a+2b) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} a & b & a & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 1 \\ b-a & a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(2a+2b) \cdot \begin{vmatrix} a & b & a \\ b-a & a-b & 0 \\ b-a & a-b & 0 \end{vmatrix} = -a(2a+2b) \begin{vmatrix} b-a & a-b \\ b-a & a-b \end{vmatrix}$$

$$= -a(2a+2b)(b-a)(a-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Rastaviti na faktore polinom:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$.

Riješiti jednačinu $\begin{vmatrix} 3x-5 & -5-2x & x+1 \\ 2x-4 & -2-2x & x-1 \\ 3x-8 & 2-3x & 2x-5 \end{vmatrix} = 0$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} 3x-5 & -5-2x & x+1 \\ 2x-4 & -2-2x & x-1 \\ 3x-8 & 2-3x & 2x-5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ 3x-8 & 3x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} \xlongequal{III_v - II_v}$$

$$\begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ x-4 & x-4 & x-4 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)\begin{vmatrix} 3x-5 & 2x+5 & x+1 \\ 2x-4 & 2x+2 & x-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[II_k - III_k]{I_k - III_k}$$

$$= (-1)(x-4)\begin{vmatrix} 2x-6 & x+4 & x+1 \\ x-3 & x+3 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)\begin{vmatrix} 2x-6 & x+4 \\ x-3 & x+3 \end{vmatrix} \xlongequal{I_v - II_v}$$

$$= (-1)(x-4)\begin{vmatrix} x-3 & 1 \\ x-3 & x+3 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)(x-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x+3 \end{vmatrix} = (-1)(x-4)(x-3)(x+2)$$

$(-1)(x-4)(x-3)(x+2) = 0$ Rješenja jednačine su $x=4$ ili $x=3$ ili $x=-2$.

Riješiti jednačinu: $\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = 0$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} x-3 & x+2 & x-1 \\ x+2 & x-4 & x \\ x-1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} \xlongequal{I_R + II_R + III_R} \begin{vmatrix} 3x-2 & x+2 & x-1 \\ 3x-2 & x-4 & x \\ 3x-2 & x+4 & x-5 \end{vmatrix} = (3x-2)\begin{vmatrix} 1 & x+2 & x-1 \\ 1 & x-4 & x \\ 1 & x+4 & x-5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[III_R - II_R]{I_R - II_R} (3x-2)\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 1 & x-4 & x \\ 0 & 8 & -5 \end{vmatrix} = -(3x-2)\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 8 & -5 \end{vmatrix} = -(3x-2)(-30+8) =$$

$= 22(3x-2)$

$22(3x-2) = 0$

$3x-2=0$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$ je rješenje jednačine

Izračunati $\begin{vmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 5 \end{vmatrix}$.

Rj.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -5 & 1 \\ 4 & 4 & -7 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{I_k + III_k \\ II_k + III_k}}{=\!=\!=} _{III_k + IV_k \cdot 2} \begin{vmatrix} 4 & a+3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ -2 & -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & a+3 & 7 \\ -2 & -2 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{vmatrix} \overset{I_k + III_k}{=\!=\!=} _{II_k + III_k}$$

$$= \begin{vmatrix} 11 & a+10 & 7 \\ -5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 11 & a+10 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) \begin{vmatrix} 11 & a+10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15(11 - a - 10)$$

$$= -15(-a+1) = 15a - 15$$

Rastaviti na faktore polinome:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix}$.

Rj.:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} \overset{I_k - III_k}{\underset{II_k - III_k}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x^2-z^2 & y^2-z^2 & z^2 \\ x^3-z^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot \begin{vmatrix} (x-z)(x+z) & (y-z)(y+z) \\ (x-z)(x^2+xz+z^2) & (y-z)(y^2+yz+z^2) \end{vmatrix} = (x-z)(y-z)\begin{vmatrix} x+z & y+z \\ x^2+xz+z^2 & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{I_k - II_k}{=\!=\!=} (x-z)(y-z)\begin{vmatrix} x-y & y+z \\ x^2-y^2+xz-yz & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix} = (x-z)(y-z)\begin{vmatrix} x-y & y+z \\ (x-y)(x+y)+z(x-y) & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-z)(y-z)(x-y)\begin{vmatrix} 1 & y+z \\ x+y+z & y^2+yz+z^2 \end{vmatrix} = (x-z)(y-z)(x-y)\big(y^2+\cancel{yz}+\underline{z^2}-xy-y^2-\cancel{yz}$$

$$-xz-yz-\underline{z^2}\big) = (x-z)(y-z)(x-y)(-xy-xz-yz)$$

b) $$\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k)}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 2a+2b & b & a+b \\ 2a+2b & a+b & a \\ 2a+2b & a & b \end{vmatrix} = 2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & b & a+b \\ 1 & a+b & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\overset{I_v - II_v}{\underset{III_v - II_v}{=\!=\!=}} 2(a+b)\begin{vmatrix} 0 & -a & b \\ 1 & a+b & a \\ 0 & -b & b-a \end{vmatrix} = 2(a+b)(-1)\begin{vmatrix} -a & b \\ -b & b-a \end{vmatrix} = 2(a+b)\begin{vmatrix} a & b \\ b & b-a \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)(ab-a^2-b^2) = -2(a+b)(a^2-ab+b^2) = -2(a^3+b^3)$$

Matematičkom indukcijom dokazati:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}$$

(determinanta ima n vrsta i n kolona).

R: BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za broj 2

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1+2x^2+x^4-x^2 = 1+x^2+x^4$$

Jednakost je tačna za broj 2.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost tačna za determinantu koja ima k vrsta i k kolona

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2k}$$

gdje k uzima brojeve od 1 do n.

Na osnovu ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za determinantu koja ima $n+1$ vrstu i $n+1$ kolonu tačnije dokažimo da

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}+x^{2n+2}.$$

Polazimo od determinante koja ima $(n+1)$-vrstu i $(n+1)$-kolonu:

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \overset{\text{razvoj po prvoj}}{\underset{\text{koloni}}{=}} (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} =$$

(ova determinanta ima n vrsta i n kolona)

(ovu determinantu mogu razviti po prvoj vrsti i ostaće mi determinanta iz pretpostavke koja ima $n-1$ vrstu i $n-1$ kolonu)

$$\overset{\text{na osnovu pretpostavke}}{=} (1+x^2)(1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) - x^2(1+x^2+x^4+\dots+x^{2n-2})$$

$$= (1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) + (x^2+x^4+x^6+\dots+x^{2n}+x^{2n+2}) -$$

$$-(x^2+x^4+x^6+\dots+x^{2n-2}+x^{2n}) = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n+2}$$ što je i trebalo dobiti

ZAKLJUČAK

Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve

Matematičkom indukcijom dokazati:

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\cdot n!$$

Rj. BAZA INDUKCIJE

Pokažimo da je tvrdnja tačna za broj 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2-4 = -2 = (-1)^{2-1}\cdot 2!$$ Jednakost je tačna za broj 2.

KORAK INDUKCIJE

Pretpostavimo da je jednakost

$$\begin{vmatrix} 1 & k & k & \dots & k & k \\ k & 2 & k & \dots & k & k \\ k & k & 3 & \dots & k & k \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ k & k & k & \dots & k-1 & k \\ k & k & k & \dots & k & k \end{vmatrix} = (-1)^{k-1}\cdot k!$$

tačna za sve brojeve od 1 do n $(k=1,2,\dots,n)$.

Uz pomoć ove pretpostavke dokažimo da je jednakost tačna za broj $n+1$ tj. dokažimo

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} = (-1)^{n}\cdot(n+1)!$$

$\boxed{\text{ZAKLJUČAK Jednakost je tačna za sve prirodne brojeve}}$

$$\begin{vmatrix} 1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} \underset{\overline{}}{\underline{I_k-(N+1)_k}} \begin{vmatrix} -n & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ 0 & 2 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ 0 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} =$$

$$=(-n)\begin{vmatrix} 2 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \\ n+1 & 3 & \dots & n+1 & n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & n+1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1 \end{vmatrix} = (-n)(n+1)\begin{vmatrix} 2 & n+1 & \dots & n+1 & 1 \\ n+1 & 3 & \dots & n+1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n+1 & n+1 & \dots & n & 1 \\ n+1 & n+1 & \dots & n+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} I_k - N_k \\ II_k - N_k \\ \vdots \\ (N-1)_k - N_k \end{matrix}$$

$$=(-1)\cdot n(n+1)\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & 1 \\ n & 2 & \dots & n & 1 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & n & \dots & n-1 & 1 \\ n & n & \dots & n & 1 \end{vmatrix} = (-1)(n+1)\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & n \\ n & 2 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \end{vmatrix} \underset{\text{pretpostavke}}{\overset{\text{na osnovu}}{=}} (-1)(n+1)(-1)^{n-1}\cdot n! = (-1)^{n}(n+1)!$$

Rang matrice

Dijagonalne i trougaone matrice

a) Matrice oblike $D = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_d \end{bmatrix}$ zovemo *dijagonalne matrice* i često ih označavamo sa $diag(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_d)$.

b) *Glavna dijagonala* kvadratne matrice su elementi koji se nalaze na dijagonalnoj liniji koja počinje u gornjem lijevom uglu matrice a završava u donjem desnom uglu. Za kvadratnu matricu kažemo da je *trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale ili ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kavadratnu matricu kažemo da je *gornje-trougaona matrica* ako su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nula. Za kvadratnu matricu kažemo da je *donje-trougaona matrica* ako su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli. ◇

Inverzna matrica

Za datu kvadratnu matricu $A_{n\times n}$, matricu $B_{n\times n}$ koja zadovoljava uslov

$$AB = I \qquad \text{i} \qquad BA = I$$

zovemo *inverz* od A i označavamo sa $B = A^{-1}$. Nisu sve kvadratne matrice invertibilne - nula matrica je trivijalni primjer, i postoji veliki broj nenula matrica koje nisu invertibilne. Za invertibilnu matricu kažemo da je *nesingularna*, a za kvadratnu matricu koja nema inverznu matricu kažemo da je *singularna matrica*. ◇

Saglasan i nesaglasan sistem

Za sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih kažemo da je *saglasan sistem* ako posjeduje bar jedno rješenje. Ako sistem nema rješenja, tada za sistem kažemo da je *nesaglasan sistem*. ◇

Elementarne red (kolona) operacije

Elementarne red (kolona) operacije su:

(i) Zamjena mjesta redova (kolona) i i j.

(ii) Množenje reda (kolone) i sa $\alpha \neq 0$.

(iii) Dodavanje reda (kolone) i pomnožene nekim brojem redu (koloni) j. ◇

Ekvivalencija

(i) Kadgod matricu B možemo dobiti iz matrice A kombinacijom elementarnih red ili kolona operacija, pišemo $A \sim B$, i kažemo da su A i B *ekvivalentne* matrice. S obzirom da su elementarne red i kolona operacije u stvari množenje redom sa lijeve i desne strane elementarnim matricama može se dokazati da

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad PAQ = B \text{ za nesingularne } P \text{ i } Q$$

(ii) Kadgod se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo red operacije, pišemo $A \overset{red}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B *red ekvivalentne*. Drugim riječima

$$A \overset{red}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad PA = B \text{ za nesingularnu } P.$$

(iii) Kad god se matrica B može dobiti iz matrice A primjenjujući samo niz uzastopnih kolona operacija, pišemo $A \overset{kol}{\sim} B$, i kažemo da su matrice A i B *kolona ekvivalentne*. Drugim riječima

$$A \overset{kol}{\sim} B \quad \Leftrightarrow \quad AQ = B \text{ za nesingularnu } Q.$$

◇

Red ešelon oblik

Za $m \times n$ matricu E, sa redovima E_{i*} i kolonama E_{*j}, kažemo da je u red ešelon obliku ako sljedeća dva uslova vrijede:

(a) Ako su svi elementi reda E_{i*} jenaki nuli, tada su i svi elementi u redovima ispod E_{i*} jednaki nuli, tj. svi nula redovi su na dnu matrice.

(b) Ako se prvi nenula elemenat u E_{i*} nalazi na $j$toj poziciji, tada su svi elementi ispod i-te pozicije u kolonama E_{*1}, E_{*2},...,E_{*j} nule.

Ova dva uslova kažu da nenula elementi u ešelon obliku moraju ležati na ili iznad glavne linije stepenica čiji je početak u gornjem lijevom uglu matrice i postepeno pada prema dole desno. Pivoti su prvi nenula elementi u ešelon redovima. Tipična struktura za matricu koja je u red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje su pivoti zaokruženi.

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

◇

Rang matrice

Pretpostavimo da je matrica $A_{m\times n}$ pomoću red operacija svedena na red ešelon oblik E. <u>Rang</u> matrice A se definiše kao broj

$$\begin{aligned} rang(A) &= \text{broj pivota} \\ &= \text{broj nenula redova u } E \\ &= \text{broj osnovnih kolona u } A \end{aligned}$$

gdje su <u>*osnovne kolone*</u> od A definisane kao one kolone u A koje sadrže pivot pozicije. ◇

Reducirani red ešelon oblik

Za matricu $E_{m\times n}$ kažemo da je u <u>*reduciranom red ešelon obliku*</u> ako su sljedeća tri uslova ispunjena.

(i) E je u red ešelon obliku.

(ii) Prvi nenula elemenat u svakom redu (tj. svaki pivot) je 1.

(iii) Sve vrijednosti iznad svakog pivota su 0.

Tipična struktura za matricu u reduciranom red ešelon obliku je ilustrirana ispod, gdje elementi označeni sa $*$ mogu biti ili nula ili nenula brojevi:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◇

1. Odrediti rang matrice:

a) Rj.

$$M=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \underset{III_R-I_R}{\overset{II_R-I_R\cdot 2}{\sim}} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{bmatrix} \overset{III_R-II_R}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad rang(M) = 3$$

b) Rj.

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ -4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{I_k\leftrightarrow II_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{III_R-I_R \\ IV_R-I_R\cdot 2}}{\overset{II_R+I_R}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{II_k\leftrightarrow III_k}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \overset{IV_R-I_R}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \overset{IV_R-III_R\cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad rang(A)=2$$

2. Odrediti rang matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rj.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & \lambda+2 \end{bmatrix} \overset{III_k \leftrightarrow I_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix} \overset{II_v + I_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix} \overset{III_v - II_v}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

ako je $\lambda=0$ tada je $rang(A)=2$

ako je $\lambda\neq0$ tada je $rang(A)=3$

3. U ovisnosti o parametru $\lambda\in\mathbb{R}$ odredite rang matrice

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Rj.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix} \underset{III_R - I_R}{\overset{II_R - I_R}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda^2-1 \\ 0 & \lambda^2-1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \underset{\substack{III_R : (\lambda-1) \\ \lambda\neq1 \\ \text{zapamtimo}}}{\overset{II_R : (\lambda-1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda+1 & 1 \end{bmatrix} \overset{III_R + II_R \cdot(-\lambda-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \underbrace{-(\lambda+1)^2+1}_{-(\lambda^2+2\lambda+1)+1} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda+2) \end{bmatrix}$$

Matrica se ne može više pojednostaviti. Diskusija:

Za $\lambda=0$ dobićemo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ rang $A=2$

Za $\lambda=-2$ imamo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ rang $A=2$.

Ostaje nam još slučaj $\lambda=1$. Zašto?

Za $\lambda=1$, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ rang $A=1$. Zašto?

U ostalim slučajevima (tj. kad je $\lambda\neq0$, $\lambda\neq-2$ i $\lambda\neq1$) rang $A=3$.

4.ˇ Diskutovati rang matrice $M=\begin{bmatrix} 1 & 10 & -6 & \lambda \\ 2 & -1 & \lambda & 3 \\ 1 & \lambda & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5.ˇ Diskutovati o rangu matrice

$$M=\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$$ u zavisnosti od parametara a i b.

(#) Diskutovati rang matrice u zavisnosti od parametara a i b,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 12 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & a \\ 3 & b & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 15 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Rj.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 & 6 & 2 \\ 5 & 4 & 12 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & a \\ 3 & b & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 15 & 10 & 7 \end{bmatrix} \overset{II_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 12 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & a \\ 3 & 4 & 6 & b & 3 \\ 7 & 10 & 15 & 5 & 7 \end{bmatrix} \overset{IV_R \leftrightarrow VI_R}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 9 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 12 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & 15 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & b & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & a \end{bmatrix} \overset{III_R \leftrightarrow I_R}{\sim}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 12 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 3 & 2 \\ 7 & 10 & 15 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & b & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & a \end{bmatrix} \begin{matrix} II_R - I_R \cdot 5 \\ III_R - I_R \cdot 2 \\ \sim \\ IV_R - I_R \cdot 7 \\ V_R - I_R \cdot 3 \\ VI_R - I_R \cdot 4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -18 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -18 & -27 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -12 & b-6 & 0 \\ 0 & -14 & -21 & -7 & a-4 \end{bmatrix} \overset{II_k \leftrightarrow V_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -18 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -27 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & -12 & b-6 & -8 \\ 0 & a-4 & -21 & -7 & -14 \end{bmatrix} \sim$$

$$\overset{II_R \leftrightarrow III_R}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -18 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & -27 & -9 & -18 \\ 0 & 0 & -12 & b-6 & -8 \\ 0 & a-4 & -21 & -7 & -14 \end{bmatrix} \begin{matrix} III_R - II_R \cdot 6 \\ \sim \\ IV_R - II_R \cdot 9 \\ V_R - II_R \cdot 4 \\ VI_R - II_R \cdot 7 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & 0 \\ 0 & a-4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diskusija

1° $a=4$, $b=2$ $\quad$ rang $A = 2$

2° $a=4$, $b \neq 2$ $\quad$ rang $A = 3$

3° $a \neq 4$, $b=2$ $\quad$ rang $A = 3$

4° $a \neq 4$, $b \neq 2$ $\quad$ rang $A = 4$

Diskutovati rang matrice $M = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2\lambda-4 & -6 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 3\lambda+4 & 2 & -2\lambda+1 & -3 \\ 24 & 8 & -4 & -12 \end{bmatrix}$ za razne vrijednosti parametra λ.

Rj.

$$M = \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2\lambda-4 & -6 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 3\lambda+4 & 2 & -2\lambda+1 & -3 \\ 24 & 8 & -4 & -12 \end{bmatrix} \overset{III_v + I_v}{\sim} \begin{bmatrix} 14 & 4 & 2\lambda-4 & -6 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ 3\lambda+18 & 6 & -3 & -9 \\ 24 & 8 & -4 & -12 \end{bmatrix} \underset{\substack{I_v : 2 \\ III_v : 3}}{\overset{IV_v : 4}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & \lambda-2 & -3 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ \lambda+6 & 2 & -1 & -3 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{IV_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 7 & 2 & \lambda-2 & -3 \\ 6 & 2 & -1 & -3 \\ \lambda+6 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 & -3 \\ 7 & 2 & \lambda-2 & -3 \\ \lambda+6 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{I_k \leftrightarrow IV_k}{\sim} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & \lambda-2 & 7 \\ -3 & 2 & -1 & \lambda+6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{III_v - I_v}{\overset{II_v - I_v}{\sim}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za $\lambda = 0$ $\operatorname{rang}(M) = 2$

Za $\lambda \neq 0$ $\operatorname{rang}(M) = 3$

(#) Diskutovati rang matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 & t & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ za razne vrijednosti parametra t.

Rj.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & t & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \underset{III_k \leftrightarrow V_k}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & t \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \underset{I_v \leftrightarrow IV_v}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & t \end{bmatrix} \underset{\substack{II_v - I_v \cdot 2 \\ IV_v - I_v}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & t \end{bmatrix} \underset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 3 & t \end{bmatrix}$$

$$\underset{IV_v + II_v \cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 11 & t \end{bmatrix} \underset{IV_v - III_v \cdot \frac{3}{2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & t \end{bmatrix}$$

$$-9 + 6 \cdot \frac{3}{2} = -9 + 9 = 0$$

$$11 - 7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{22}{2} - \frac{21}{2} = \frac{1}{2}$$

Bez obzira na vrijednost parametra t rang matrice M je uvijek 4.

Diskutovati rang matrice $M=\begin{bmatrix} 7-a & -12 & 6 \\ 10 & -19-a & 10 \\ 12 & -24 & 13-a \end{bmatrix}$ u zavisnosti od parametra a.

Rj:

$$M=\begin{bmatrix} 7-a & -12 & 6 \\ 10 & -19-a & 10 \\ 12 & -24 & 13-a \end{bmatrix} \overset{I_k+(II_k+III_k)}{\sim} \begin{bmatrix} 1-a & -12 & 6 \\ 1-a & -19-a & 10 \\ 1-a & -24 & 13-a \end{bmatrix} \underset{III_v-I_v}{\overset{II_v-I_v}{\sim}}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1-a & -12 & 6 \\ 0 & -7-a & 4 \\ 0 & -12 & 7-a \end{bmatrix} \underset{a\neq -7}{\overset{III_v+II_v\cdot\frac{12}{-7-a}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1-a & -12 & 6 \\ 0 & -7-a & 4 \\ 0 & 0 & 7-a+4\cdot\frac{12}{-7-a} \end{bmatrix}$$

$$7-a+\frac{48}{-7-a}=7-a+\frac{-48}{7+a}=\frac{(7-a)(7+a)-48}{7+a}=\frac{49-a^2-48}{7+a}=\frac{1-a^2}{7+a}$$

$$=\frac{(1-a)(1+a)}{7+a}$$

$$M=\begin{bmatrix} 1-a & -12 & 6 \\ 0 & -7-a & 4 \\ 0 & 0 & \frac{(1-a)(1+a)}{7+a} \end{bmatrix}$$

Diskusija:

$1°$ $a=1$ $\quad M=\begin{bmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{II_v+I_v\cdot\frac{8}{-12}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 4+6\cdot\frac{8}{-12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ rang $M=1$

$2°$ $a=-1$ $\quad M=\begin{bmatrix} -2 & -12 & 6 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ rang $M=2$

$3°$ $a=-7$ $\quad M=\begin{bmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -12 & 14 \end{bmatrix} \overset{II_v\leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 0 & -12 & 14 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

rang $M=3$

$4°$ $a\neq 1$ i $a\neq -1$ i $a\neq -7$ $\quad$ rang $M=3$